

Zwei kombinatorische Konstruktionen für strikt ergodische Folgen

von

Christian Grillenberger

aus

Pappenheim

1970 № 496

Zwei kombinatorische Konstruktionen für strikt ergodische Folgen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Christian Grillenberger

aus

Pappenheim

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung : 22. 7. 1970

Dekan : Prof. Dr. F. Tichy

Erstberichterstatte : Prof. Dr. K. Jacobs

Zweitberichterstatte : Prof. Dr. H. Bauer

Inhalt

Einleitung	1
I. Vorbereitungen	4
1. Kompakte dynamische Systeme	4
2. Entropie und strikt ergodische dynamische Systeme im k -Shift-Raum	10
3. Punktspektrum dynamischer Systeme	12
II. Folgen gegebener Entropie	14
III. Folgen mit vorgegebenem Punktspektrum	23
1. Sturm'sche Folgen	23
2. Sturm-Toeplitz-Folgen	31
Literatur	41

Einleitung

Im vergangenen Jahr wurde von R. Jewett [6] die Frage nach dem Zusammenhang zwischen maßtheoretischer und topologischer Dynamik beantwortet. Er konnte zeigen, daß es zu jedem schwach mischenden dynamischen System auf einem Lebesgueraum ein isomorphes strikt ergodisches, topologisches dynamisches System gibt. Krieger konnte das Resultat verschärfen: Nur die Ergodizität ist notwendig, und das topologische System kann in einen Shift-Raum gelegt werden, wenn die Entropie mit der Alphabetlänge verträglich ist. Diese Sätze haben aber nichtkonstruktiven Charakter. Wenn es möglich wäre, wenigstens die Jewett'sche Stufe konstruktiv durchzuführen, könnte man hoffen, mit der im Satz 1.5 beschriebenen Methode etwa Folgen aus stark mischenden oder K-Systemen im 2-Shift-Raum zu erhalten.

Mehrere strikt ergodische Folgen mit vorgegebenen Isomorphieinvarianten sind in den letzten fünf Jahren konstruiert worden. Kakutani ([7], 1966) gibt in Verallgemeinerung der Morse-Folge ein Kontinuum von Folgen an, die alle die dyadisch-rationale Gruppe als Punktspektrum haben, aber nicht zu isomorphen Systemen gehören. Durch eine andere Verallgemeinerung der Morse-Folge erzwang Keane ([9], 1967), daß das Punktspektrum der Folge eine gegebene rationale Gruppe ist. Jacobs und Keane ([5], 1968) benutzten ein Einsetz-

verfahren von Toeplitz, um Folgen mit vorgegebenem und reinem rationalem Punktspektrum zu bekommen. Schließlich fanden Hahn und Katznelson ([1], 1966) Folgen mit beliebig großer Entropie in Räumen größerer Alphabetlänge.

In dieser Arbeit führen wir zwei weitere Konstruktionen durch.

Im Kapitel II. wird das Ergebnis von Hahn und Katznelson verbessert. Anstelle des schwachen Gesetzes der großen Zahl benutzen wir einfache kombinatorische Verfahren, um eine große Zahl von Blöcken gleicher Länge in die Folge einzubauen. Außerdem können wir mit der Entropie beliebig nahe an den Logarithmus der Alphabetlänge herankommen und jede derunterliegende Zahl genau erreichen. Diese Konstruktion wurde angeregt durch einen Satz von Katok und Stepin über den Zusammenhang zwischen Approximierbarkeit und Entropie ([8]).

Im Kapitel III. verwenden wir die Toeplitz'sche Methode, um Folgen mit beliebigem reinem Punktspektrum aus einfacheren Bausteinen, den Sturm'schen Folgen, zusammenzusetzen. Zum Nachweis der gesuchten Eigenschaften dient ein allgemeines Prinzip, das im Satz 1.5 dargestellt wird.

Unsere Konstruktionen sind so angelegt, daß bei konstruierbarem Grunddatum die Folge konstruierbar ist. Dabei sei "konstruierbar" im Sinne "von einer Turing-Maschine berechenbar" verstanden.

Für die vielfältigen Anregungen zu dieser Arbeit
und für die Förderung, die ich während meines Studi-
ums von ihm erfahren habe, möchte ich Herrn Prof.
Jacobs herzlich danken. Herrn Prof. Parry danke ich
für ein wertvolles Gespräch zu Kapitel II.

Kapitel I. Vorbereitungen

§1. Kompakte dynamische Systeme

Sei Ω_0 ein kompakter, metrischer Raum und $T: \Omega_0 \rightarrow \Omega_0$ ein Automorphismus. (Ω_0, T) heißt kompaktes dynamisches System.

$\Omega \subseteq \Omega_0$ heißt minimal invariant, wenn $\Omega \neq \emptyset$, abgeschlossen, $\Omega = T\Omega$, und wenn Ω keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften enthält. Für $T|_{\Omega} = \text{Rest}_{\Omega} T$ schreiben wir T . (Ω, T) heißt minimales dynamisches System. Sei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$. Ist $\omega \in \Omega_0$, so heiße $O(\omega) = \{T^n \omega : n \in \mathbb{Z}\}$ die Bahn und ihr Abschluß $\overline{O(\omega)}$ die Bahnhülle von ω .

$M \subseteq \mathbb{Z}$ heiße dicht in $\mathbb{Z}$, wenn es ein $L \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für jedes $t \in \mathbb{Z}$ gilt: $\langle t, t+L \rangle \cap M \neq \emptyset$. Dabei ist für $a, b \in \mathbb{Z}$ $\langle a, b \rangle := \{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b\}$. $\langle a, b \rangle$ heißt Intervall in $\mathbb{Z}$.

Satz 1.1 (Oxtoby [11]) : Für abgeschlossenes $\Omega \subseteq \Omega_0$ sind quivalent :

- Ω ist minimal invariant.
- Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $\overline{O(\omega)} = \Omega$.
- Für jedes $\omega \in \Omega$ und jede Umgebung U von ω ist $\{t \in \mathbb{Z} : T^t \omega \in U\}$ dicht in $\mathbb{Z}$.
- Es gibt ein $\omega \in \Omega$, so daß $\overline{O(\omega)} = \Omega$ und für jede Umgebung U von ω $\{t \in \mathbb{Z} : T^t \omega \in U\}$ in $\mathbb{Z}$ dicht liegt.

Zu jedem minimal invarianten dynamischen System (Ω, T) gibt es wenigstens ein T -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω . Man interessiert sich nun besonders für solche Systeme, die auch eine maßtheoretische Minimalittseigen-

schaft besitzen: Ein minimal invariantes dynamisches System (Ω, T) heißt strikt ergodisch, wenn es genau ein T -invariantes W -Maß auf Ω gibt. Es gilt der

Satz 1.2 ([11]): Ein minimal invariantes (Ω, T) ist genau dann strikt ergodisch, wenn es zu jedem $f \in C(\Omega_0)$ ein $\bar{f} \in \mathbb{R}$ gibt, so daß die Bedingung

$$(*) \quad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(T^\nu \omega) = \bar{f}$$

gleichmäßig für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt ist.

Hinreichend für den Satz ist schon: $(*)$ gilt gleichmäßig auf einer in Ω dichten Menge, z.B. auf $O(\omega_0)$ mit $\omega_0 \in \Omega$. In diesem Fall bedeutet die Bedingung: die Folge $(f(T^n \omega_0))_{n \in \mathbb{Z}}$ ist gleichmäßig Cesàro-mittelbar.

Ist μ das invariante W -Maß auf einem strikt ergodischen (Ω, T) , so schreiben wir auch (Ω, T, μ) statt (Ω, T) .

In strikt ergodischen dynamischen Systemen gilt ein Analogon zum Gleichverteilungssatz von Kronecker-Weyl [14] für abgeschlossene zyklische Untergruppen eines endlich-dimensionalen Torus:

Satz 1.3 : 1, Sei (Ω, T, μ) strikt ergodisch und $U \subseteq \Omega$ offen. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so daß für alle $n \geq n_0$

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} 1_U(T^\nu \omega) > \mu(U) - \varepsilon \quad \text{gleichmäßig auf } \Omega.$$

2, Ist $U \subseteq \Omega$ offen und μ -randlos, d.h. $\mu(\partial U) = 0$, so gilt gleichmäßig auf Ω :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} 1_U(T^\nu \omega) = \mu(U).$$

Beweis: 1, ergibt sich, wenn man 1_U von unten durch stetige Funktionen approximiert und den Satz von der monotonen Integration und Satz 1.2 benützt. 2, folgt durch Anwendung von 1, auf U und $\bar{U}$.

Die Eigenschaften "minimal invariant" und "strikt ergodisch von Ω " sind nach Satz 1.1 d, und Satz 1.2 schon an den Punkten von Ω nachzuprüfen. Das Auffinden strikt ergodischer dynamischer Systeme läuft also auf die Angabe gewisser Punkte hinaus. Hat ω die Eigenschaft aus 1.1 c, so nennen wir es fastperiodisch; ist $\omega \in \Omega_0$ so, daß für jedes $f \in C(\Omega_0)$ die Folge $(f(T^n \omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ glm. Cesàro ist, heißt ω strikt transitiv. Ist ω fastperiodisch und strikt transitiv, also $(\overline{O(\omega)}, T)$ strikt ergodisch, so heißt auch ω strikt ergodisch.

Der Raum, in dem wir strikt ergodische Punkte suchen, ist der k -Shift-Raum

$$\Omega_k = \langle 0, k-1 \rangle^{\mathbb{Z}} = \{ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} : \omega_n \in \langle 0, k-1 \rangle \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \}$$

mit der Abbildung (dem Shift) $T: (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$. Die Topologie auf Ω_k ist die Produkttopologie (mit der diskreten Topologie auf $\langle 0, k-1 \rangle$).

Zur Beschreibung von Objekten in Ω_k verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$\Omega_k^e := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle 0, k-1 \rangle^{\langle 1, n \rangle}$ sei die Menge der endlichen Wörter oder Blöcke über dem Alphabet $\langle 0, k-1 \rangle$; das leere Wort ist nicht einbegriffen. Für $P \in \langle 0, k-1 \rangle^{\langle 1, n \rangle}$ heißt $l(P) := n$ die Länge von P .

Sind $P = (p_1, \dots, p_{l(P)})$, $Q = (q_1, \dots, q_{l(Q)}) \in \Omega_k^e$, so sei $PQ = P \cdot Q := (p_1, \dots, p_{l(P)}, q_1, \dots, q_{l(Q)})$.

Q kommt in P an der Stelle s vor, wenn $(p_s, \dots, p_{s+l(Q)-1}) = Q$.

Ist $P \in \Omega_k^e$ und $r \in \mathbb{Z}$, so heißt

$$r[P] := \{(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} : (\omega_r, \dots, \omega_{r+l(P)-1}) = P\} \in \Omega_k$$

ein endlicher Zylinder der Länge $l(P)$. Für $\omega \in r[P]$ sagen wir auch, P komme in ω an der Stelle r vor. Die Menge der endlichen Zylinder ist eine Topologiebasis aus offen-abgeschlossenen Mengen für Ω_k , die von T auf sich abgebildet wird. T ist also ein Automorphismus.

Wichtige Unterkörper des Borelkrpers auf Ω_k sind die folgenden: Für $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ sei

$$B_{\langle m, n \rangle} := \mathcal{G}\{r[P] : P \in \Omega_k^e, l(P) = n - m + 1\}.$$

Da die charakteristischen Funktionen endlicher Zylinder stetig sind und eine totale Menge in $C(\Omega_k)$ bilden, lassen sich die Eigenschaften "fastperiodisch" und "strikt transitiv" für Punkte in Ω_k wie folgt kennzeichnen (wir sprechen dann von fastperiodischen usw. Folgen):

- 1, $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist fastperiodisch, wenn für jedes $P \in \Omega_k^e$, das in ω vorkommt, die Menge $\{r \in \mathbb{Z} : \omega \in r[P]\}$ in $\mathbb{Z}$ dicht liegt.
- 2, ω ist strikt transitiv, wenn für jedes $P \in \Omega_k^e$ die Menge $M := \{r \in \mathbb{Z} : \omega \in r[P]\}$ gleichmäßig Cesàro ist, d.h.

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=m+1}^{m+n} 1_M(\nu) \quad \text{gleichmäßig für alle } m \in \mathbb{Z} \text{ konvergiert.}$$

Ist $\omega \in \Omega_k$ strikt ergodisch, so sei μ_ω das invariante W -Maß auf $(\overline{O(\omega)}, T)$.

Die folgende Methode kann dazu dienen, aus einem gegebenen strikt ergodischen dynamischen System ein isomorphes im 2-Shift-Raum zu konstruieren. Sie wird auch bei Veech [13] verwendet. Dort ist wie in unserer späteren Anwendung das ursprüngliche System eine kompakte Gruppe.

Definition 1.4 : Seien (X, B, m, S) und (X', B', m', S') abstrakte dynamische Systeme (d.h. B eine σ -Algebra auf X , m ein W -Maß auf B , $S: X \rightarrow X$ eine meßbare Abbildung, die das Maß m erhält und zu der es eine Menge $F \in B$ gibt mit: $m(F)=1$; $S:F \rightarrow F$ bijektiv und $(S|_F)^{-1}$ ist meßbar).

Eine Abbildung τ mit Definitionsbereich in X heißt Homomorphismus von (X, B, m, S) nach (X', B', m', S') , wenn τ eine meßbare Menge $Y \subseteq X$ vom Maß 1 meßbar so nach X' abbildet, daß $\tau \circ S = S' \circ \tau$ und $\tau_* m = m'$. τ heißt Isomorphismus, wenn außerdem $\tau(Y)$ meßbar ist und τ eine Bijektion von Y nach $\tau(Y)$ mit meßbarer Umkehrabbildung ist.

Sei (Ω, D, μ) ein strikt ergodisches dynamisches System und $U \subseteq \Omega$ eine μ -randlose offene Menge ($\mu(\partial U)=0$) mit $0 < \mu(U) < 1$ (die erste Ungleichheit gilt stets).

Setzen wir $R := \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} D^t \partial U$, so ist $\mu(R)=1$ und R invariant unter D . In R ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{aligned} \eta: R &\rightarrow \Omega_2 \\ x &\mapsto \eta^x = (\eta^{x(n)})_{n \in \mathbb{Z}} = (1_U(D^n x))_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Satz 1.5 : η ist stetig und ein Homomorphismus von (Ω, D) in ein strikt ergodisches dynamisches System in Ω_2 . Ist η injektiv, so ist es sogar ein Isomorphismus der beiden dynamischen Systeme.

Den Beweis führen wir in vier Schritten.

1, Jedes η^x ist strikt ergodisch.

Sei $x \in R$ und $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ ein Block, der in η^x vorkommt.

Es ist $\eta^x(t+\nu) = \omega_\nu$ ($1 \leq \nu \leq n$) genau dann, wenn

$$D^{t+\nu}x \in I_{\omega_\nu} \quad (1 \leq \nu \leq n) \quad \text{oder}$$

$$D^t x \in \bigcap_{1 \leq \nu \leq n} D^{-\nu} I_{\omega_\nu}. \quad (\text{Dabei ist } I_1 := U, I_0 := \bar{U}.)$$

Diese Menge ist nicht leer (sie enthält x), offen und

μ -randlos, denn

$$\bigcap_{1 \leq \nu \leq n} D^{-\nu} I_{\omega_\nu} \subseteq \bigcup_{1 \leq \nu \leq n} D^{-\nu} \partial I_{\omega_\nu} \subseteq \bigcup_{1 \leq \nu \leq n} D^{-\nu} \partial U.$$

Nach 1.1 c, liegt die Menge $\{t \in \mathbb{Z} : D^t x \in \bigcap_{1 \leq \nu \leq n} D^{-\nu} I_{\omega_\nu}\}$

dicht in $\mathbb{Z}$. Nach 1.3 ist sie glm. Cesàro-mittelbar.

2, η ist stetig, die η^x haben also alle dieselbe

$$\text{Bahnhülle; } \eta \cdot D = T \cdot \eta.$$

Sei hierzu $x \in R$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in R mit $x_n \rightarrow x$.

Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ ist $D^{-j} I_{\eta^x(j)}$ eine Umgebung von x . Für

$n \geq n_j$ liegt x_n in dieser Umgebung, damit ist $\eta^{x_n}(j) = \eta^x(j)$.

$\eta \cdot D = T \cdot \eta$ ergibt sich sofort:

$$\eta^{Dx}(n) = 1_U(D^n Dx) = 1_U(D^{n+1} x) = \eta^x(n+1) = (T\eta^x)(n)$$

Der induzierte Borelkörper auf R stimmt mit dem von

der Relativtopologie erzeugten überein. Die stetige

Abbildung η ist daher auch meßbar. Wegen $\eta \cdot D = T \cdot \eta$

ist das Bild von $\mu|R$ unter η ein invariantes W-Maß

auf $\eta(R)$; es gibt aber nur ein solches.

4, η ist Isomorphismus, wenn es injektiv ist.

Wegen der Regularität des Maßes μ gibt es eine K^σ -Menge $F \in \mathcal{R}$, die wir als invariant annehmen können, mit

$\mu(F) = 1$. Sei $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ mit kompakten K_n . $\eta|_{K_n}$ ist ein Homöomorphismus von K_n nach $\eta(K_n)$, und daher $\eta|_F$ eine in beiden Richtungen meßbare Bijektion $F \longleftrightarrow \eta(F)$. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

§2. Entropie und strikt ergodische Systeme im k -Shift-Raum

Ist μ ein invariantes W -Maß auf $(\Omega_k, \mathcal{T})$, so läßt sich in folgender Weise die Entropie $\hat{H}(\mu)$ definieren:

Sei $z_k(0) = 0$

$$z_k(x) = -x \log x \quad x \in]0, 1] \quad (\text{stets sei } \log = \log_k).$$

Für die Borelkörper $B_{\langle m, n \rangle}$ sei

$$H(B_{\langle m, n \rangle}, \mu) = \sum_{P \in \Omega_k^e, l(P)=n-m+1} z_k(\mu[P]) .$$

Elementare Rechnungen zeigen:

- (a) $H(B_{\langle m, n \rangle}, \mu) \leq 1 = \log_k k$; $H(B_{\langle m, n \rangle}, \mu) = 1$ genau dann, wenn μ allen Atomen von $B_{\langle m, n \rangle}$ gleiche Masse gibt.
- (b) $H(B_{\langle m, n \rangle}, \mu) \leq H(B_{\langle m, r \rangle}, \mu) + H(B_{\langle r+1, n \rangle}, \mu) \quad (m \leq r \leq n)$,
und Gleichheit gilt genau dann, wenn $B_{\langle m, r \rangle}$ und $B_{\langle r+1, n \rangle}$ unter μ unabhängig sind.

Aus (a), (b) folgt: es existiert

$$\hat{H}(\mu) := \lim_n \frac{1}{n} H(B_{\langle 1, n \rangle}, \mu) \leq 1 .$$

$\hat{H}(\mu)$ heißt die Entropie von μ . Ist $\mu = \mu_\omega$ mit strikt ergodischem ω , so schreiben wir auch: $\hat{H}(\mu_\omega) = \hat{H}(\omega)$.

$\hat{H}(\mu) = 1$ genau dann, wenn μ das Produkt von Gleichverteilungen auf $\langle 0, k-1 \rangle$ ist. Dieses Maß hat keinen minimal invarianten Träger. Es wird sich aber zeigen, daß es zu jedem $\alpha < 1$ einen strikt ergodischen Punkt ω mit $\hat{H}(\omega) > \alpha$ gibt.

Zur Abschätzung der Entropie nach oben dient uns das folgende Ergebnis von Katok und Stepin [8]. Wir formulieren den Satz gleich für unseren Spezialfall.

Sei D ein Automorphismus eines Lebesgueraumes (H, B, ν) und $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\alpha_n \searrow 0$. Nach Katok und Stepin besitzt D eine Approximation durch periodische Transformationen mit der Geschwindigkeit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Folge von endlichen Zerlegungen von H : $\xi_n = (C_{n,i})_{1 \leq i \leq q_n}$ und von Automorphismen D_n gibt, so daß

i, $\xi_n \rightarrow B$, d.h. zu $A \in B$ gibt es eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(A_n \in \mathcal{G}(\xi_n)) \quad \text{mit} \quad \nu(A_n \Delta A) \rightarrow 0.$$

ii, $D_n \xi_n = \xi_n$

$$\text{iii, } \sum_{i=1}^{q_n} \mu(D_n C_{n,i} \Delta D_n C_{n,i}) < \alpha_{q_n}$$

Satz 1.6 : Sei (Ω_k, T, μ) ergodisch. Dann ist die Entropie gegeben durch

$\hat{H}(\mu) = \inf \{ \alpha > 0 : \text{zu jedem } \delta > 0 \text{ besitzt } T \text{ eine Approximation}$

durch periodische Automorphismen mit Geschwindigkeit $2^{\frac{\alpha+\delta}{\log n}} \}$

Ist $\Omega \in \Omega_k$ eine abgeschlossene invariante Menge, also (Ω, T) ein kompaktes dynamisches System, so wird folgendermaßen die absolute Entropie $\hat{E}(\Omega)$ definiert (Parry [12]):

$$\hat{E}(\Omega) = \lim_n \frac{1}{n} \log \mathcal{V}(n)$$

$$\text{mit } \mathcal{V}(n) = |\{P \in \Omega_k^e : l(P)=n, \Omega \cap_1 [P] \neq \emptyset\}|$$

Stets gilt: Ist μ ein invariantes W-Maß auf Ω_k , das von Ω getragen wird, so ist $\hat{H}(\mu) \leq \hat{E}(\Omega)$. Folgende Umkehrung im Fall strikt ergodischer $\Omega \in \Omega_k$ ist ein Spezialfall von [12, Theorem 3].

Satz 1.7 : Ist $\Omega \in \Omega_k$ minimal invariant, so gibt es ein von Ω getragenes invariantes W-Maß μ , so daß $\hat{E}(\Omega) = \hat{H}(\mu)$. Ist insbesondere Ω strikt ergodisch, so gilt diese Gleichung für das invariante W-Maß auf Ω .

Dieser Satz wird es uns ermöglichen, durch Abzählen von Blöcken untere Schranken für die Entropie zu bekommen.

§3. Punktspektrum dynamischer Systeme

Ist (X, B, m, S) ein abstraktes dynamisches System (für uns ist (X, B) immer ein Lebesgueraum), so induziert S im komplexen Hilbertraum L_m^2 einen unitären Operator S durch $Sf(x) = f(Sx) \bmod m$. Das Spektrum von S ist eine Isomorphieinvariante und heißt das Spektrum von (X, B, m, S) . Ist μ ergodisch, so sind die Eigenwerte einfach und bilden eine Untergruppe von $\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$. Diese heißt das Punktspektrum. Wird L_m^2 von den Eigenvektoren aufgespannt, so hat (X, B, m, S) reines Punktspektrum. Für Lebesgueräume (X, B, m) ist L_m^2 separabel und daher das Punktspektrum höch-

stens abzählbar. Die Klasse der ergodischen dynamischen Systeme mit reinem Punktspektrum ist vollständig bekannt, denn es gelten folgende Sätze ([2], S. 347f.; [4], S. 223f.):

Satz 1.8 : Sei $X \leq \mathcal{T}^M$ eine abgeschlossene Untergruppe des $|M|$ -dimensionalen Torus $\mathcal{T}^M$ mit zyklischem Element x (d.h. $\overline{\{nx : n \in \mathbb{Z}\}} = X$), und

$$\begin{array}{ccc} D_x: \mathcal{T}^M & \longrightarrow & \mathcal{T}^M \\ & y \longmapsto & x+y \end{array}$$

Dann ist (X, D_x) ein strikt ergodisches dynamisches System mit reinem Punktspektrum, nämlich der Dualgruppe von X oder der Gruppe, die erzeugt wird von den Projektionen $\tau_j x$ ($j \in M$). Jede Restklasse $X+y$ ($y \in \mathcal{T}^M$) ist mit D_x ebenfalls strikt ergodisch und isomorph zu (X, D_x) , also mit demselben Punktspektrum. Das invariante Maß auf $X+y$ ist eine Translation des Haarmaßes auf X .

Korollar 1.9 : Sei $G \leq \mathcal{T}$ eine Untergruppe. Dann gibt es eine Menge M mit $|M| \leq |G|$ und eine abgeschlossene Untergruppe $X \leq \mathcal{T}^M$ mit zyklischem Element x , so daß (X, D_x) G als Spektrum besitzt.

Satz 1.10 : Seien (X, B, m, S) und (X', B', m', S') ergodische dynamische Systeme mit demselben reinen Punktspektrum. Dann sind die Systeme maßalgebren-isomorph. Sind (X, B, m) und (X', B', m') Lebesgueräume, so gibt es einen Punktisomorphismus.

Im Kapitel III konstruieren wir zu einer gegebenen Gruppe auch strikt ergodische Systeme im Raum (Ω_2, T) . Zum Nachweis der gesuchten Eigenschaften dient aber die entsprechende kompakte Gruppe; es wird einfach ein Punktisomorphismus angegeben.

Kapitel II. Folgen gegebener Entropie

Definition 2.1 : $M \subseteq \Omega_K^e$ sei eine nichtleere Menge von Blöcken der Länge $m \in \mathbb{N}$. M heißt starrs m-Blocksystem, wenn für $Q_1, Q_2, Q_3 \in M$ der Block Q_3 in $Q_1 Q_2$ höchstens an den Stellen 1 und $m+1$ auftritt.

Eine nichtleere Teilmenge eines starren Blocksystems ist ebenfalls ein solches. Jedes starre m-Blocksystem M besitzt eine natürliche Ordnung (die lexikographische):

$$M = \{Q_1, \dots, Q_{|M|}\}$$

Definition 2.2 :

$$\hat{M} = \{Q_{\sigma(1)} Q_{\sigma(2)} \dots Q_{\sigma(|M|)} : \sigma \in \mathcal{S}_{|M|}, \sigma(1)=1, \sigma(|M|)=|M|\}$$

Lemma 2.3 : M ist ein starres $m \cdot |M|$ -Blocksystem der Mächtigkeit $|\hat{M}| = (|M|-2)!$, falls $|M| > 1$. $|\hat{M}| > |M|$ gilt genau dann, wenn $|M| \geq 5$.

Der Beweis ist klar.

Sei eine Folge $(M_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von starren m_j -Blocksystemen gegeben, so daß

$$M_{j+1} \subseteq \hat{M}_j,$$

$$|M_j| \geq 5,$$

und sei

$$k_j^{m_j} \lambda_j = |M_j|.$$

Dann ist $m_{j+1} = m_j \cdot |M_j| \geq 5m_j$, also $m_j \nearrow \infty$, und

$$k_{j+1}^{m_{j+1}} \lambda_{j+1} \leq |\hat{M}_j| = (k_j^{m_j} \lambda_j - 2)! < k_j^{m_j} \lambda_j^{k_j^{m_j} \lambda_j} = k_{j+1}^{m_{j+1}} \lambda_j,$$

also $0 < \lambda_{j+1} < \lambda_j \leq 1$, und die Folge $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Die Folge $(M_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ermöglicht die Konstruktion einer

strikt ergodischen Folge $\eta \in \Omega_K$ mit der Entropie $\lim \lambda_j$.

Sei E_j das lexikographisch erste, L_j das letzte Element von M_j . Nach der Konstruktion von M_j ist E_j Anfangsstück von E_{j+1} , L_j Endstück von L_{j+1} . Da $m_j \nearrow \infty$, wird somit eine Folge $\eta = (\eta_r)_{r \in \mathbb{Z}} \in \Omega_K$ definiert durch

$$(\eta_{-m_j+1}, \dots, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m_j}) = L_j \cdot E_j \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Satz 2.4 : Das so definierte $\eta \in \Omega_K$ ist strikt ergodisch und hat die Entropie

$$\hat{H}(\eta) = \lim \lambda_j.$$

Beweis: a, Fastperiodizität: Jeder Block $L_j \cdot E_j$ kommt (wegen der Starrebedingung genau) an den Stellen $rm_{j+1} - m_j + 1$ ($r \in \mathbb{Z}$) vor. Kommt ein Block $P \in \Omega_K^e$ aber in η vor, so auch in einem $L_j \cdot E_j$.

b, Strikte Transitivität: $P \in \Omega_K^e$ komme in η vor. Sei $m_j > l(P)$. Es gebe h_0 Stellen $0 \leq t_1 < \dots < t_{h_0} < l(P)$, so daß P in $L_j E_j$ an der Stelle $m_j - t_u$ ($1 \leq u \leq h_0$) vorkommt, und in $Q_r \in M_{j+1}$ ($1 \leq r \leq |M_{j+1}|$) komme P h_r -mal vor. Dann besitzt P in η offenbar die gleichmäßige Cesàro-Dichte

$$\frac{h_0}{m_{j+1}} + \sum_{r=1}^{|M_{j+1}|} \frac{h_r}{m_{j+2}} = \frac{1}{m_{j+1}} (h_0 + \sum_{r=1}^{|M_{j+1}|} h_r);$$

denn in jedem Element von M_{j+2} kommen alle $Q \in M_{j+1}$ genau einmal vor, und $L_j E_j$ hat die regelmäßige Häufigkeit $\frac{1}{m_{j+1}}$.

c, $\hat{H}(\eta) \geq \lim \lambda_j$: Wir verwenden 1.7. Nach Konstruktion kommen in η alle Blöcke von M_j vor ($j \in \mathbb{N}$). Daher ist

$$\hat{H}(\eta) = \hat{H}(\overline{0(\eta)}) \geq \inf_j \frac{1}{m_j} \log |M_j| = \inf \lambda_j = \lim \lambda_j.$$

d; $\hat{H}(\gamma) \leftarrow \lim \lambda_j$: Dies wird bewiesen durch Angabe einer Katok-Stepin-Approximation für $(O(\gamma), T)$ mit $q_j = m_{j+1}$ und Geschwindigkeit

$$\alpha_{q_j} = \frac{2}{m_j} = \frac{2}{\log m_{j+1}} \cdot \frac{\log(m_j k^{m_j \lambda_j})}{m_j} = 2 \frac{\lambda_j + \frac{\log m_j}{m_j}}{m_{j+1}};$$

denn da $m_j \nearrow \infty$, ist $\lim \frac{\log m_j}{m_j} = 0$. Die Approximation ist dann sogar eine asymptotisch beste (siehe 1.6).

Sei $f_j := \{r[Q] \wedge \Omega : -m_j+1 \leq r \leq 0, Q \in M_j\}$ ($\Omega = \overline{O(\gamma)}$).

Da jede Folge in Ω aus den Blöcken des starren Systems M_j zusammengesetzt ist, ist f_j eine meßbare Zerlegung von Ω mit der Mächtigkeit $q_j = m_j \cdot |M_j| = m_{j+1}$. Jedes Element von f_j hat dasselbe Maß $\mu_{\gamma}(r[Q]) = \frac{1}{m_{j+1}}$.

Für den Shift T ist $T(r[Q] \wedge \Omega) = r_{-1}[Q] \wedge \Omega$. Wir setzen für $\omega \in \Omega$:

$$T_j(\omega) := \begin{cases} T(\omega) & \omega \in r[Q] \wedge \Omega \in f_j \text{ mit } -m_j+2 \leq r \leq 0 \\ T^{-m_j+1}(\omega) & \omega \in -m_j[Q] \wedge \Omega \in f_j \end{cases}$$

$T_j|_{-m_j+1[Q] \wedge \Omega}$ ist stetige Bijektion von $-m_j+1[Q] \wedge \Omega$ nach $0[Q] \wedge \Omega$, die Abbildung T_j ist also eine geeignete approximierende Abbildung. Da in γ kein Block QQ ($Q \in M_j$) auftritt, ist $-m_j[Q] \wedge 0[Q] \wedge \Omega = \emptyset$ und

$$\begin{aligned} & \sum_{-m_j+1 \leq r \leq 0, Q \in M_j} \mu_{\gamma}(T(r[Q] \wedge \Omega) \Delta T_j(r[Q] \wedge \Omega)) = \\ & = \sum_{Q \in M_j} \mu_{\gamma}((-m_j[Q] \Delta 0[Q]) \wedge \Omega) = 2 \cdot |M_j| \cdot \frac{1}{m_{j+1}} = \frac{2}{m_j}. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $\mathcal{F}_j \longrightarrow B_k \wedge \Omega$. (B_k ist dabei der Borelkörper $B_k = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} B_{\langle -n, n \rangle}$ auf Ω_k .) Das ist erfüllt, wenn es zu jedem endlichen Zylinder $_{-s}[P]$ mit $0 < s < l(P)$ ein j_0 gibt, so daß für $j > j_0$ $_{-s}[P] \wedge \Omega \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_j)$.

Sei $m_j > l(P)$. Ist dann $_{-r}[Q] \wedge _{-s}[P] \wedge \Omega \neq \emptyset$ für ein $_{-r}[Q] \wedge \Omega \in \mathcal{F}_{j+1}$, so ist wegen $_{-r-m_j}[L_j Q E_j] \wedge \Omega = _{-r}[Q] \wedge \Omega$ und $_{-r-m_j} < -s < -s+l(P) < m_j < r+m_{j+1}+m_j$ $_{-r-m_j}[L_j Q E_j] \subseteq _{-s}[P]$ und so $_{-r}[Q] \wedge \Omega \subseteq _{-s}[P] \wedge \Omega$, $\mathcal{F}_{j+1}$ zerlegt also den Zylinder $_{-s}[P] \wedge \Omega$.

Wählen wir in der obigen Konstruktion stets $M_{j+1} = \hat{M}_j$, so ist die Folge γ mit einer Turing-Maschine konstruierbar. Wir wollen nun für jedes $\alpha \in]0, 1[$ gewinnen:

a, eine Turing-konstruierbare strikt ergodische Folge

$$\gamma \in \Omega_k \text{ mit } \hat{H}(\gamma) > \alpha ;$$

b, eine strikt ergodische Folge $\gamma \in \Omega_k$ mit $\hat{H}(\gamma) = \alpha$.

Daß dies möglich ist, werden die folgenden drei Lemmata zusammen mit dem bisher Bewiesenen sichern. 2.5 zeigt, daß wir nur ein hinreichend mächtiges starres Blocksystem finden müssen. Ein solches wird dann im Beweis von Lemma 2.7 explizit angegeben. Zunächst brauchen wir einige Vorbereitungen.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in]0, 1[$ so, daß $k^{n\lambda} \in \mathbb{N}$. Wir definieren die beiden Folgen

$$(\overset{n}{\lambda}_j)_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (\lambda_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$$

(n bzw. λ ist nicht Exponent, sondern oberer Index) rekursiv durch:

$$n_1^{\lambda} : = n$$

$$\lambda_1^n = \lambda$$

$$n_{j+1}^{\lambda} := n_{\lambda,j}^{\lambda} \cdot k^{n_{\lambda,j}^{\lambda} \cdot \lambda_j^n} \quad k^{n_{j+1}^{\lambda} \cdot \lambda_{j+1}^n} = (k^{n_{\lambda,j}^{\lambda} \cdot \lambda_j^n - 2})! \quad (j \in \mathbb{N})$$

$$\text{Wegen } (x-2)! < x^x \text{ ist } k^{n_{j+1}^{\lambda} \cdot \lambda_{j+1}^n} < k^{n_{\lambda,j}^{\lambda} \cdot \lambda_j^n \cdot k^{n_{\lambda,j}^{\lambda} \cdot \lambda_j^n}} = k^{n_{j+1}^{\lambda} \cdot \lambda_j^n},$$

$$\text{also} \quad \lambda_{j+1}^n < \lambda_j^n.$$

$$\text{Es existiert daher } \lambda^{(n)} := \lim_j \lambda_j^n.$$

Zu $\alpha \in]0, 1[$ und $n \in \mathbb{N}$ gebe es $\lambda \in]0, 1[$, so daß $k^{n\lambda} \in \mathbb{N}$ und $\lambda^{(n)} > \alpha$. Dann betrachten wir die beiden Folgen

$$(n_{\alpha,j})_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (\lambda_{\alpha,j}^n)_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{mit}$$

$$n_{\alpha,1} := n$$

$$n_{\alpha,j+1} := n_{\alpha,j} \cdot k^{n_{\alpha,j} \cdot \lambda_{\alpha,j}^n} \quad (j \in \mathbb{N})$$

$$k^{n_{\alpha,j} \cdot \lambda_{\alpha,j}^n} = \min \{s \in \mathbb{N} : s = k^{n_{\alpha,j} \cdot \tau}, \tau^{(n_{\alpha,j})} > \alpha\} \quad (j \in \mathbb{N})$$

Die letztere Menge ist nicht leer, denn $k^{n\lambda}$ ($j=1$) bzw.

$$(k^{n_{\alpha,j-1} \cdot \lambda_{\alpha,j-1}^n - 2})! \quad (j > 1) \text{ gehört zu ihr. Offensichtlich}$$

$$\text{ist} \quad 1 > \lambda_{\alpha,j}^n > \lambda_{\alpha,j+1}^n > \alpha.$$

Lemma 2.5 : a, Sei $0 < \alpha < \beta < 1$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq n_0$ und $\lambda \in [\beta, 1[$ mit $k^{n\lambda} \in \mathbb{N}$ gilt: $\lambda^{(n)} > \alpha$ und $n_j^{\lambda} \nearrow \infty$.

b, Seien $\alpha \in]0, 1[$ und $n \in \mathbb{N}$ so, daß es $\lambda \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\lambda^{(n)} > \alpha. \text{ Dann gilt: } \lim_j \lambda_{\alpha,j}^n = \alpha \text{ und } n_{\alpha,j} \nearrow \infty.$$

Beweis: Sei $\lambda > \beta$ und n_0 so groß, daß für $n > n_0$

$$k^{n^\alpha} > n, \quad 4 \cdot \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^r} \quad \beta - \alpha.$$

Wir zeigen induktiv: $\lambda_j^n > (n_{j-1}^\lambda)^2$ ($j \geq 2$); $\lambda_j^n > \alpha$

Dies ist richtig für $j=1$. Es gelte für alle $j \in \langle 1, r \rangle$ ($r \in \mathbb{N}$).

$$\text{Dann ist } n_{r+1}^\lambda = n_r^\lambda \cdot k^{n_r^\lambda \cdot \lambda_r^n} > n_r^\lambda \cdot k^{n_r^\lambda \cdot \alpha} > (n_r^\lambda)^2,$$

da $n_r^\lambda > n > n_0$, und für $j \in \langle 1, r \rangle$ folgt aus $x! > x^x e^{-x}$:

$$\begin{aligned} k^{n_{j+1}^\lambda \cdot \lambda_{j+1}^n} &= (k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n} - 2)! > k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n (k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n} - 2)} e^{-k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n}} \\ &= k^{n_j^\lambda \cdot k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n} \left(\lambda_j^n \left(1 - \frac{2}{k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n}} \right) - \frac{\log e}{k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n}} \right)}; \end{aligned}$$

$$\lambda_{j+1}^n > \lambda_j^n - \frac{2 \cdot \lambda_j^n}{k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n}} - \frac{\log e}{k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n}} > \lambda_j^n - \frac{4}{k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n}}, \text{ und daraus:}$$

$$\lambda_{r+1}^n > \lambda_1^n - 4 \sum_{j=1}^r \frac{1}{k^{n_j^\lambda \cdot \lambda_j^n}} > \lambda_1^n - 4 \sum_{j=1}^r \frac{1}{n_1^{\lambda_j \cdot \alpha}} > \lambda - (\beta - \alpha) > \alpha.$$

b, Für $j \in \mathbb{N}$ ist $n_{\alpha, j} \cdot \lambda_{\alpha, j}^n > 0$, also $n_{\alpha, j+1} > n_{\alpha, j}$ und $n_{\alpha, j} \nearrow \infty$:

$(\lambda_{\alpha, j}^n)_{j \in \mathbb{N}}$ fällt monoton und $\lim \lambda_{\alpha, j}^n \geq \alpha$. Sei $1 > \beta > \alpha$

und n_0 so groß, daß für $m > n_0$, $\lambda' > \frac{\beta + \alpha}{2}$ mit $k^{m \cdot \lambda'} \in \mathbb{N}$:

$$\lambda'^{(m)} \geq \alpha; \text{ weiter sei } n_0 > \frac{2 \log 2}{\beta - \alpha}.$$

Für jedes $m > n_0$ ist dann

$$\{k^{m \cdot \lambda'} : \lambda' \in]\frac{\beta + \alpha}{2}, \beta[\} \cap \mathbb{N} = \{s \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} \log s \in]\frac{\beta + \alpha}{2}, \beta[\} \neq \emptyset,$$

da $\log 1 = 0$, $\log s \nearrow_s \infty$ und $\log(s+1) - \log s \leq \log 2$

für $s \in \mathbb{N}$, und somit $\frac{1}{m}(\log(s+1) - \log s) \leq \frac{1}{n_0} \log 2 < \frac{\beta - \alpha}{2}$.

Das bedeutet aber, daß für $n_{\alpha, j} > n_0$ gilt: $\lambda_{\alpha, j}^n < \beta$.

Lemma 2.6 (Exponentielles Wachstum einer Folgenklasse):

Seien $k, r \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $r \geq 2$, $A_1, \dots, A_r > 0$ und

$$(1') \quad A_{n+1} = (k-1)(A_n + \dots + A_{n-r+1}) \quad (n \geq r)$$

Dann existiert $a(r, k) := \lim_n \frac{A_{n+1}}{A_n}$; $a(r, k)$ ist durch r und k bestimmt und $\lim_r a(r, k) = k$.

Beweis: Aus (1') folgt für $n \geq r+1$:

$$\frac{1}{k-1} A_n = (A_{n-1} + \dots + A_{n-r}) > (A_{n-1} + \dots + A_{n-r+1}), \quad \text{und in (1')}$$

$$\text{eingesetzt: } A_{n+1} < (k-1)A_n \left(1 + \frac{1}{k-1}\right) = kA_n$$

$$(2') \quad 0 < A_{n+1} < kA_n \quad (n \geq r+1)$$

Subtraktion zweier aufeinanderfolgender Gleichungen (1') gibt

$$(3') \quad A_{n+1} - A_n = (k-1)(A_n - A_{n-r}) \quad (n \geq r+1)$$

$$\text{Aus (1')-(3')} \text{ wird mit } a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}:$$

$$(1) \quad a_n = (k-1) \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1}a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1} \dots a_{n-r+1}}\right) \quad (n \geq r)$$

$$(2) \quad 0 < a_n < k$$

$$(3) \quad a_n - 1 = (k-1) \left(1 - \frac{1}{a_{n-1} \dots a_{n-r}}\right) \quad \left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right\} (n \geq r+1)$$

Aus (3) bekommen wir

$$(4) \quad a_{n+1} - a_n = (k-1) \left(\frac{1}{a_{n-1} \dots a_{n-r}} - \frac{1}{a_n \dots a_{n-r+1}}\right) \quad (n \geq r+1)$$

(1) und (2) geben folgende untere Abschätzung:

$$a_n > (k-1) \left(1 + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k^{r-1}}\right) = (k-1) \frac{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^r}{1 - \frac{1}{k}} = k \left(1 - \left(\frac{1}{k}\right)^r\right)$$

$$(5) \quad a_n > k \left(1 - \left(\frac{1}{k}\right)^r\right) \geq k \left(1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2\right) = \frac{k^2 - 1}{k} > k-1 \quad (n \geq 2r)$$

(4) und (5) geben:

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{k-1}{a_n \cdot \dots \cdot a_{n-r}} \cdot |(a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_{n-r+1} - a_{n-r})| \leq$$

$$\leq \left(\frac{k}{k^2-1}\right)^r \cdot \max_{0 \leq j < r} |a_{n-j} - a_{n-j-1}| \leq r \left(\frac{2}{3}\right)^r \cdot \max_{0 \leq j < r} |a_{n-j} - a_{n-j-1}|$$

($n \geq 3r$)

Da $\max_{r \geq 2} r \left(\frac{2}{3}\right)^r = \frac{8}{9} < 1$, liefert das die Konvergenz von

$\sum |a_{n+1} - a_n|$ und von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Wegen (1), (2) und (5) muß gelten:

$$k \geq a = (k-1) \left(1 + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a^{r-1}}\right) \geq k \left(1 - \left(\frac{1}{k}\right)^r\right);$$

$$a^r = (k-1) \frac{a^{r-1}}{a-1}; \quad a^{r+1} - ka^r + k-1 = 0.$$

Da das Polynom $P(x) = x^{r+1} - kx^r + k-1$ in $]1, k]$ nur eine Nullstelle besitzt, hängt a nicht von $A_1, \dots, A_r$ ab. Dies beweist das Lemma.

Lemma 2.7 : Zu $k \geq 2$, $\varepsilon > 0$ und $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein starres n -Blocksystem $M \subseteq \Omega_k^e$ mit $|M| > k^{n(1-\varepsilon)}$.

Beweis: Sei $r \geq 2$ so groß, daß $k \left(1 - \left(\frac{1}{k}\right)^r\right) > k^{1-\frac{\varepsilon}{2}}$, $r < n \in \mathbb{N}$ und

$$S_n^r = \{(s_1, \dots, s_n) \in \langle 0, k-1 \rangle^{\langle 1, n \rangle} : s_1 = \dots = s_r = 0, s_{r+1} = 1; \\ \text{an keiner Stelle } r' > r+1 \text{ kommt der Block } \underbrace{0 \dots 0}_r \text{ vor}\}$$

Die Markierung der Blockanfänge macht S_n^r zu einem starren Blocksystem. Es ist $|S_{r+2}^r| = k$; $|S_{r+3}^r| = k^2$; ...; $|S_{2r}^r| = k^{r-1}$;

$|S_{2r+1}^r| = k^r - 1$. Für $n > 2r+1$ bestimmen wir eine Rekursions-

formel für $|S_n^r|$: Sei $s = (s_1, \dots, s_n) \in S_n^r$ mit

$s_{n-q} \neq 0$, $s_j = 0$ für alle $j > n-q$ ($0 \leq q < r$). Dann ist

$\bar{s} = (s_1, \dots, s_{n-q-1}) \in S_{n-q-1}^r$. Die Abbildung

$$s \longmapsto \bar{s}$$

$$S_n^r \longrightarrow \bigcup_{0 \leq q < r} S_{n-q-1}^r$$

ist surjektiv, und je $(k-1)$ Elemente von S_n^r dasselbe Bild.

Wir bekommen daher

$$|S_n^r| = (k-1) \left| \bigcup_{0 \leq p < r} S_{n-p+1}^r \right| = (k-1) \sum_{p=1}^r |S_{n-p}^r| \quad (n \geq 2r+1).$$

Nach 2.6 wächst die Folge $(|S_n^r|)_{r \leq n \in \mathbb{N}}$ exponentiell:

$$\frac{|S_{n+1}^r|}{|S_n^r|} \xrightarrow{n} a(r, k) \geq k(1 - (\frac{1}{k})^r) > k^{1-\frac{r}{k}}.$$

Es gibt daher ein $C > 0$, so daß $|S_n^r| > C \cdot k^{n(1-\frac{r}{k})}$ ($n \geq r$);

da aber $C \cdot k^{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n} \infty$, ist

$$|S_n^r| > k^{n(1-\frac{r}{k})} \quad \text{für fast alle } n.$$

Kapitel III. Folgen mit vorgegebenem Punktspektrum

§1. Sturm'sche Folgen

Die Sturm'schen Folgen werden bei Morse- Hedlund [10] und Hedlund [3] in anderer Darstellung betrachtet. Ihren Namen haben sie daher, daß sie die Nullstellenverteilung von Lösungen Sturm'scher Differentialgleichungen charakterisieren ([10]). Wir behandeln eine etwas kleinere Klasse als [10], [3].

Sei $\mathbf{T} = [0,1[$ mit der Torustopologie. Mit Addition mod 1 ist $\mathbf{T}$ eine kompakte Gruppe. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\{x\} = x - [x]$ der gebrochene Anteil von x . Für $a, b \in \mathbf{T}$ mit $a < b$ sei $]a, b[_{\mathbf{T}} =]a, b[$ und $]b, a[_{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \setminus [a, b]$.

α sei irrational und $0 < \alpha < 1$. $D: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ sei definiert durch $D(z) = \{z + \alpha\}$.

D ist eine Translation und somit ein Automorphismus von $\mathbf{T}$. $(\mathbf{T}, D)$ ist ein strikt ergodisches dynamisches System mit reinem Punktspektrum $\{e^{2i\pi n\alpha} : n \in \mathbb{Z}\}$ (Satz 1.8), das D -invariante Maß ist das Lebesguemaß λ .

Wir wollen die Konstruktion von Satz 1.5 durchführen und setzen hierzu

$$I_1 :=]0, \alpha[_{\mathbf{T}}; \quad I_0 :=]\alpha, 0[_{\mathbf{T}}.$$

I_1 ist offen und λ -randlos, $I_0 = \bar{I}_1$, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D^n \cap I_1 = 0(o)$.

Für $z \in 0(o)$ gibt es genau eine Zahl in $\mathbb{Z}$, sie heiße n_z , mit $D^{n_z} z = 0$. Ist $n \in \mathbb{Z} \setminus \langle n_z, n_z + 1 \rangle$, so ist $D^n z \in I_0 \cup I_1$. Dies ermöglicht die folgende

Definition 3.1 : Für $z \in \mathbf{T} \setminus 0(o)$ sei $\gamma^z \in \Omega_2$ gegeben durch

$$\gamma^z(n) = 1_{I_1}(D^n z) \quad (n \in \mathbf{Z}) ;$$

für $z \in 0(o)$ die beiden Folgen γ_1^z, γ_2^z durch

$$\gamma_i^z(n) = 1_{I_i}(D^n z) \quad (n \in \mathbf{Z} \setminus \langle n_z, n_z+1 \rangle, i=1,2)$$

$$\gamma_1^z(n_z) = 1, \quad \gamma_1^z(n_z+1) = 0$$

$$\gamma_2^z(n_z) = 0, \quad \gamma_2^z(n_z+1) = 1.$$

Diese Folgen heißen Sturm'sche Folgen.

Sei $H := \{\gamma^z : z \in \mathbf{T} \setminus 0(o)\} \cup \{\gamma_1^z, \gamma_2^z : z \in 0(o)\} \subseteq \Omega_2$,

und $\gamma : \mathbf{T} \setminus 0(o) \longrightarrow \Omega_2$
 $z \longmapsto \gamma^z$.

Satz 3.2 : (H, T) ist strikt ergodisch in Ω_2 und besitzt reines Punktspektrum, nämlich die Gruppe

$$\{e^{2i\pi n\alpha} : n \in \mathbf{Z}\}.$$

Beweis: Wir zeigen in 1, daß γ injektiv ist; nach 1.5 ist dann $(\overline{\gamma(\mathbf{T} \setminus 0(o))}, T)$ ein strikt ergodisches dynamisches System und isomorph zu $(\mathbf{T}, D)$. Der Rest folgt dann aus der Identität $H = \overline{\gamma(\mathbf{T} \setminus 0(o))}$ (2, und 3,) und aus der Isomorphieinvarianz des Spektrums.

1, Injektivität von γ : Die Folgen γ^z ($z \in \mathbf{T} \setminus 0(o)$), γ_1^z, γ_2^z ($z \in 0(o)$) sind sogar alle verschieden. Seien nämlich $x, y \in \mathbf{T}$, $x \neq y$. Dann gibt es ein $n \in \mathbf{Z}$ mit: $D^n 0 \in]x, y[_{\mathbf{T}}$, $D^{n+1} 0 \in]y, x[_{\mathbf{T}}$. Das bedeutet $D^{-n} y \in I_1$, $D^{-n} x \in I_0$ und $\gamma^y(-n) \neq \gamma^x(-n)$ (bzw. $\gamma_1^y(-n) \neq \gamma_1^x(-n)$ oder ähnlich). Daß für jedes $x \in 0(o)$ gilt

$\gamma_1^x \neq \gamma_2^x$, folgt aus der Definition.

2, $H \subseteq \overline{\gamma(\mathbf{T} \setminus 0(o))}$: Wir zeigen, daß $\gamma_1^0 \in \overline{\gamma(\mathbf{T} \setminus 0(o))}$;

in den anderen Fällen geht der Beweis ebenso. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{T} \setminus O(o)$ mit $x_n \searrow 0$. Für $x_n < \min(\alpha; 1-\alpha)$ ist $\eta^{x_n}(0) = 1 = \eta_1^0(0)$; $\eta^{x_n}(1) = 0 = \eta_1^0(1)$.

Sei $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. $I_{\eta_1^0(j)}$ ist eine Umgebung von $D^j O$ und D^j ist stetig auf $\mathbb{T}$. Daher gibt es ein $n_j \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq n_j$: $D^j x_n \in I_{\eta_1^0(j)}$, d.h. $\eta^{x_n}(j) = \eta_1^0(j)$.

3, $\overline{\eta(\mathbb{T} \setminus O(o))} \subseteq H$: Zu $\omega \in \overline{\eta(\mathbb{T} \setminus O(o))}$ gibt es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{T} \setminus O(o)$ mit $\eta^{z_n} \rightarrow \omega$. Wir können annehmen, daß z_n von einer Seite gegen ein $z \in \mathbb{T}$ konvergiert. Ist $z \in \mathbb{T} \setminus O(o)$, so folgt $\eta^z = \omega$ wegen der Stetigkeit der Abbildung η ; für $z \in O(o)$ ist $\omega = \eta_1^z$ oder $\omega = \eta_2^z$ nach Beweisteil 2.

Bemerkung: In trivialer Weise lassen sich mit dieser "Sturm'schen" Methode auch periodische Folgen gegebener Periode gewinnen: Sei α rational, $0 < \alpha < 1$; I_0, I_1, D, η , seien wie bisher. Für $z \in \mathbb{T} \setminus O(o)$ ist $O(z) = \overline{O(z)} \subseteq I_0 \cup I_1$. $\eta|_{O(z)}$ ist Homöomorphismus zwischen $O(z)$ und $O(\eta^z)$. z und η^z haben dieselbe Periode q , falls $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$.

Mechanische Konstruktion irrationaler Sturm'scher Folgen

Wir wollen jetzt zu gegebenem irrationalem α ein rekursives Verfahren zur Berechnung eines Punktes aus der oben betrachteten Menge H gewinnen. Dazu interpretieren wir die Translation des Torus als Vertauschung zweier Intervalle. Wir verwenden von den bisherigen unwesentlich

abweichende Begriffe.

$T' =]0, 1]$; $\{x'\} = 1$ wenn $x \in Z$; $\{x'\} = \{x\}$ sonst.

$\alpha \in]0, 1[$ sei irrational und $D' : T' \rightarrow T'$

$$x \mapsto \{x + \alpha\}'$$

$B =]0, 1 - \alpha]$, $C =]1 - \alpha, 1]$

$\eta' \in \Omega_2$ sei definiert durch $\eta'(n) = 1_C(D'^n 1)$.

In der bisherigen Schreibweise ist das die Folge η_2^α .

D' ist auf den beiden Intervallen B und C affin und vertauscht nur die Reihenfolge. Umgekehrt ist jede so gear- tete Abbildung offensichtlich eine Translation von T' .

Sei D'_C die von D' auf C induzierte Abbildung:

$D'_C(x) = D'^s x$ wenn $s = \inf \{n \in \mathbb{N} : D'^n x \in C\}$.

D'_C ist eine Vertauschung der beiden Intervalle

$]1 - \alpha, 1 - \alpha + \alpha\{\frac{1}{\alpha}\}]$ und $]1 - \alpha + \alpha\{\frac{1}{\alpha}\}, 1]$ in C und durch

eine affine Transformation $f_\alpha :]1 - \alpha, 1] \rightarrow]0, 1]$ iso- morph zu einer Translation $\overline{D'}$ von T' , die die Intervalle

$\overline{B} =]0, \{\frac{1}{\alpha}\}]$ und $\overline{C} =]\{\frac{1}{\alpha}\}, 1]$

vertauscht, also $\overline{D'} : x \mapsto \{x + \overline{\alpha}\}'$ mit $\overline{\alpha} = 1 - \{\frac{1}{\alpha}\}$.

Die Folge η' ist zusammengesetzt aus Blöcken Q^1 und Q^0 der Form $10\dots 0$, wobei $1(Q^1) = [\frac{1}{\alpha}]$, $1(Q^0) = [\frac{1}{\alpha}] + 1$.

Sei $D'^n 1 \in C$, d.h. $\eta'(n) = 1$. Dann ist

$(\eta'(n), \dots, \eta'(n + [\frac{1}{\alpha}])) = Q^0$

genau dann, wenn $D'^{n + [\frac{1}{\alpha}]} 1 \in 1 - \alpha$ oder

$1 - \alpha + \alpha[\frac{1}{\alpha}] < D'^n 1 + \alpha[\frac{1}{\alpha}] \leq 2 - \alpha$;

$1 - \alpha < D'^n 1 \leq 2 - \alpha - \alpha[\frac{1}{\alpha}] = 1 - \alpha + \alpha\{\frac{1}{\alpha}\}$,

d.h. wenn $f_\alpha D'^n 1 \in \overline{B}$

Ist die Folge $\overline{\eta}$ mit $\overline{\eta}(n) = 1_{\overline{G}}(\overline{D}^{n-1})$ bekannt, so also auch η' : Man substituiere, von 0 ausgehend, in $\overline{\eta}$ für 1 den Block Q^1 , für 0 den Block Q^0 . Dies liefert ein Rekursionsverfahren:

Sei ein irrationales $\alpha_i \in]0, 1[$ gegeben, $D_1: x \rightarrow \{x + \alpha_i\}'$, $B_1 =]0, 1 - \alpha_i]$, $C_1 =]1 - \alpha_i, 1]$. η_i sei zu α_i gebildet wie oben η' zu α ($\eta_i(n) = 1_{\overline{G}}(D_1^{n-1})$).

Induktiv sei definiert: $\alpha_{j+1} = \overline{\alpha_j} = 1 - \{\frac{1}{\alpha_j}\}$ (irrational),

$\eta_{j+1} = \overline{\eta_j}$. Nach dem oben Gesagten ist $\eta_j = \eta_i^{\alpha_j}$ (zur Translation um α_j) und η_j entsteht aus η_{j+1} durch Substitution von $\underbrace{10\dots 0}_{[\frac{1}{\alpha_j}]}$ für 1 und $\underbrace{10\dots 0}_{[\frac{1}{\alpha_j}]+1}$ für 0.

Sei nun

$$\begin{aligned} Q^1_0 &= 1 & Q^0_0 &= 0 \\ Q^1_j &= Q^1_{j-1} \underbrace{Q^0_{j-1} \dots Q^0_{j-1}}_{[\frac{1}{\alpha_j}]-1} & Q^0_j &= Q^1_j Q^0_{j-1} \quad (j \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Jeder Block Q^1_j ist dann Anfangsstück von $(\eta_i(n))_{n \geq 0}$, und die ganze Folge η_i ist bekannt, da $\eta_i(-1) = 0$, $\eta_i(-k) = \eta_i(k-1)$ ($k \geq 2$). Die negative Hälfte von η_i läßt sich auch dadurch beschreiben, daß jedes Q^0_j Endstück von $(\eta_i(n))_{n < 0}$ ist; denn unsere bisherige Kenntnis über Sturm'sche Folgen sichert, $(\eta_i(n))_{n \geq 0}$ nur auf eine Weise fastperiodisch nach links fortgesetzt werden kann, und die angegebene Fortsetzung ist fastperiodisch, weil jeder Block $Q^0_j Q^1_j$ in $(\eta_i(n))_{n \geq 0}$ vorkommt.

Wir haben daher nur die Zahlen $\left[\frac{1}{\alpha_j}\right]$ ($j \in \mathbb{N}$) zu bestimmen. Das ist möglich mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung von α_1 .

$$\alpha_1 = [0; a_1, a_2, a_3, \dots] \quad \text{mit } a_j \in \mathbb{N} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

$r_n := [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ sei der n -te Rest ($n \geq 1$). (Zur Schreibweise siehe Chintschin, Kettenbrüche)

Wir berechnen nun:

$$\left[\frac{1}{\alpha_1}\right] = a_1; \quad \left\{\frac{1}{\alpha_1}\right\} = \left\{a_1 + \frac{1}{r_2}\right\} = \frac{1}{r_2}; \quad \alpha_2 = 1 - \left\{\frac{1}{\alpha_1}\right\} = 1 - \frac{1}{r_2}$$

$$(a) \quad \alpha_2 = 1 - \frac{1}{r_2}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\left[\frac{1}{\alpha_1}\right] = k$, falls $\frac{1}{1 - \frac{1}{r_2}} \in]k, k+1[$, denn r_2 ist

irrational, oder $r_2 \in]1 + \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k-1}[$. (Dabei ist $1 + \frac{1}{0} = \infty$)

Wegen $r_2 = a_2 + \frac{1}{r_3}$ bedeutet das

$$(b) \quad \left[\frac{1}{\alpha_1}\right] = \begin{cases} a_2 + 1 & a_2 = 1 \\ 1 & a_2 \geq 2 \end{cases}$$

Für $a_2 = 1$ ist $\left\{\frac{1}{\alpha_1}\right\} = \frac{1}{\alpha_2} - a_2 - 1 = \frac{r_2}{r_2 - 1} - a_2 - 1 =$

$$\frac{1 + \frac{1}{r_3}}{\frac{1}{r_3}} - a_2 - 1 = r_3 - a_2 = \frac{1}{r_4}.$$

Für $a_2 \geq 2$ ist $\left\{\frac{1}{\alpha_1}\right\} = \frac{1}{\alpha_2} - 1 = \frac{r_2}{r_2 - 1} - 1 = \frac{1}{r_2 - 1}$.

$$(c) \quad \alpha_3 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{r_4} & a_2 = 1 \\ 1 - \frac{1}{r_2 - 1} & a_2 \geq 2 \end{cases}$$

Aus (a), (b), (c) ist schon abzulesen, wie sich die Folge

$(\left[\frac{1}{\alpha_1}\right], \left[\frac{1}{\alpha_2}\right], \left[\frac{1}{\alpha_3}\right], \dots)$ berechnet; den Induktionsbeweis führen wir nicht aus.

$$([\frac{1}{\alpha_1}], [\frac{1}{\alpha_2}], [\frac{1}{\alpha_3}], \dots) = (P_1, P_2, P_3, \dots) \quad \text{mit}$$

$$P_1 = a_1$$

$$P_j = \underbrace{11\dots 1}_{a_j-1} \quad j \text{ gerade } (P_j \text{ ist evtl. leer})$$

$$P_j = a_j+1 \quad j > 1 \text{ ungerade}$$

Bemerkung: Offensichtlich kann jede Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n \in \mathbb{N}$, in der nicht schließlich nur 1 vorkommt, als die Folge $([\frac{1}{\alpha_1}], [\frac{1}{\alpha_2}], \dots)$ auftreten.

Im Hinblick auf den nächsten Paragraphen ist es wünschenswert, mit Hilfe der Blockkonstruktion auch eine Folge η^x mit $x \in T \setminus O(o)$ zu erhalten. Dabei kommt es uns nicht darauf an, x näher festzulegen. Zunächst konstruieren wir auf folgende Art ein $\hat{\eta}_i$ in der Bahnhülle

$$\text{von } \eta_i: \text{ Sei } n_j = - \sum_{k=0}^{j-1} l(Q_k^1) \quad (j > 0) \quad \text{und}$$

$$(\hat{\eta}_i(n_j), \dots, \hat{\eta}_i(n_j + l(Q_j^0) - 1)) = Q_j^0.$$

Das bedeutet: $\hat{\eta}_i(0) = 0 = Q_0^0$; ist im j -ten Schritt der Abschnitt $\langle n_j, n_j + l(Q_j^0) - 1 \rangle$ von $\hat{\eta}_i$ festgelegt, so setzt man im $(j+1)$ -ten Schritt vor diesen Abschnitt den Block Q_j^1 und dahinter $[\frac{1}{\alpha_{j+1}}] - 1$ mal den Block Q_j^0 . Da unendlich oft $[\frac{1}{\alpha_j}] \geq 2$ und jeder der Blöcke Q_j^0 in η_i vorkommt, erhält man so eine Folge in $\overline{O(\eta_i)}$. Man sieht nun leicht:

$$\hat{\eta}_i(n) = \eta_i(n) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \langle -1, 0 \rangle; \quad \eta_i = \eta_i^{\alpha_i}, \quad \hat{\eta}_i = \eta_i^{\alpha_i}.$$

Gehen wir von anderen Stellen als 0 aus, so liefern uns die beiden Konstruktionen alle Folgen η_1^x, η_2^x ($x \in O(o)$). Eine Modifikation der Konstruktion für $\hat{\eta}_i$ gibt aber

ein $\omega \in \overline{O(\eta_i)}$, das nicht diese Form hat:

$$\omega(0) = 0$$

Im j -ten Schritt ($j \geq 0$) sei ω auf einem Stück

$\langle m_j, m_{j+1}(Q_j^0) - 1 \rangle$ definiert, so daß

$$(\omega(m_j), \dots, \omega(m_{j+1}(Q_j^0) - 1)) = Q_j^0.$$

Ist $g_j := |\{k \in \langle 1, j \rangle : [\frac{1}{\alpha_k}] \geq 2\}|$ gerade, so sei

$m_{j+1} = m_j - 1(Q_j^1)$: vor das schon festgelegte Stück setze man Q_j^1 , dahinter $[\frac{1}{\alpha_{j+1}}] - 1$ mal Q_j^0 .

Ist g_j ungerade, so sei $m_{j+1} = m_j - 1(Q_{j+1}^1)$: vor den definierten Abschnitt werde Q_{j+1}^1 gesetzt.

Wieder ist die Folge ω vollständig definiert und liegt in $\overline{O(\eta_i)}$. Um zu sichern, daß $\omega \notin O(\eta_i) \cup O(\hat{\eta}_i)$, ist zu zeigen, daß es nicht auf eine der beiden oben behandelten Arten konstruiert werden kann. Der Beweis, den wir nicht durchführen, beruht auf einer Starreeigenschaft der Blöcke: Für jedes $j \geq 0$ kommt Q_j^0 in Q_{j+1}^0 genau an den Stellen $1 + 1(Q_j^1) + k \cdot 1(Q_j^0)$ ($0 \leq k < [\frac{1}{\alpha_{j+1}}]$) vor.

§2. Sturm-Toeplitz-Folgen

Das Einsetzverfahren, das in [5] auf periodische Folgen in Ω_3 angewendet wird und dort strikt ergodische Folgen mit vorgegebenem, rein rationalem Spektrum liefert, wollen wir jetzt für Sturm'sche Folgen durchführen.

Sei $\omega \in \Omega_3$, und 2 komme beidseitig unendlich oft in ω vor. 2 bezeichnet hier die "Löcher". Sei

$$t_0(\omega) := \max \{t \leq 0 : \omega(t) = 2\}$$

$$t_k(\omega) := \max \{t < t_{k+1}(\omega) : \omega(t) = 2\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$t_k(\omega) := \min \{t > t_{k-1}(\omega) : \omega(t) = 2\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Ist weiter $\omega' \in \Omega_3$, so sei $[\omega' \rightarrow \omega] \in \Omega_3$ gegeben durch

$$[\omega' \rightarrow \omega](t) = \begin{cases} \omega(t) & \omega(t) \neq 2 \\ \omega'(j) & \omega(t) = 2 \text{ und } t = t_j(\omega) \end{cases}$$

Sei $M \in \mathbb{N}$ mit $M = \langle 1, i \rangle$ oder $M = \mathbb{N}$. Zu $j \in M$ seien zwei Zahlen α_j, u_j ($0 < \alpha_j \leq \frac{1}{2}$, $0 < u_j < 1$) gegeben, so daß

$$0 \notin \{u_j + n \cdot \alpha_j : j \in M, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir definieren die Folgen $\eta_j, \eta^j \in \Omega_3$ ($j \in M$) und $\eta^M \in \Omega_2$:

$$\eta_j(n) = \begin{cases} 2 & \{u_j + n \cdot \alpha_j\} \in]0, \alpha_j[\\ 0 & " \in]\alpha_j, 1[, j \text{ ungerade} \\ 1 & " \in]\alpha_j, 1[, j \text{ gerade} \end{cases}$$

-die η_j sind Sturm'sche Folgen- und

$$\eta^1 = \eta_1$$

$$\eta^t = [\eta_t \rightarrow \eta^{t-1}] \quad (t \in M \setminus \{1\})$$

$$\eta^M(n) = \begin{cases} \eta^i(n) & \eta^i(n) \neq 2 \\ 0 & \eta^i(n) = 2, i \text{ gerade} \\ 1 & \eta^i(n) = 2, i \text{ ungerade} \end{cases} \quad (M = \langle 1, i \rangle)$$

und für $M = \mathbb{N}$: $\eta^M = \lim_t \eta^t$

Da in jedem η_j unendlich oft 2 vorkommt, ist der Einsetzprozeß sinnvoll. Ist $M = \mathbb{N}$, so existiert $\lim \eta^t$, da einmal vorhandene 0 oder 1 nicht mehr geändert werden. Wir wählen in diesem Fall die Folge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ so, daß $\eta^M \in \Omega_2$; dazu genügt es z.B., daß sowohl $u_j \in]0, \alpha_j[$ als auch $u_j \in]\alpha_j, 1[$ unendlich oft. Für das so konstruierte η^M gilt der

Satz 3.3 : η^M ist Punkt eines strikt ergodischen dynamischen Systems mit reinem Punktspektrum, das erzeugt wird von der Menge $\{e^{2i\pi\alpha_1 \dots \alpha_j} : j \in M\}$.

Der Beweis erfolgt durch Rückführung auf Satz 1.5 in den nachfolgenden Lemmata.

Korollar 3.4 : 1, Sei $G \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$ eine höchstens abzählbare Untergruppe. Dann gibt es ein strikt ergodisches $\omega \in \Omega_2$, so daß $(O(\omega), T)$ reines Punktspektrum, und zwar die Gruppe G , besitzt.

2, Gibt es eine Turing-Maschine, die ein Erzeugendensystem von G produziert, so kann auch ω von einer Turing-Maschine hergestellt werden.

Beweis: 1, Für $G = \{1\}$ ist nichts zu zeigen. Ist $G \neq \{1\}$, so gibt es eine Folge $(\alpha_j)_{j \in M}$ (M endlich oder $M = \mathbb{N}$) mit $0 < \alpha_j < \frac{1}{2}$, so daß G von der Menge

$$\{e^{2i\pi\alpha_1 \dots \alpha_j} : j \in M\} \text{ erzeugt wird.}$$

2, Sowohl die Berechnung der Folge $(\alpha_j)_{j \in M}$ aus 1, als

auch die Blockkonstruktion der Sturm'schen Folgen und das Toeplitz'sche Einsetzverfahren lassen sich durch Turing-Maschinen ausführen.

Für die in der Konstruktion verwendeten Sturm'schen Folgen η_j kann man zu jedem $t_k(\eta_j)$ das k angeben: Ist $\eta_j(t) = 2$, d.h. $\{u_j + t \cdot \alpha_j\} \in]0, \alpha_j[$, so ist $t = t_{[u_j + t \alpha_j]}(\eta_j)$. Zur Berechnung von η^M kann man daher so vorgehen:
Ist $\{u_1 + n \cdot \alpha_1\} \in]\alpha_1, 1[: \eta^M(n) = 0$.
Ist $\{u_1 + n \cdot \alpha_1\} \in]0, \alpha_1[$ und $\eta_2([u_1 + n \cdot \alpha_1]) \neq 2$, d.h. $\{u_2 + [u_1 + n \cdot \alpha_1] \cdot \alpha_2\} \in]\alpha_2, 1[$, so ist $\eta^M(n) = 1$.
Ist $\{u_1 + n \cdot \alpha_1\} \in]0, \alpha_1[$, $\{u_2 + [u_1 + n \cdot \alpha_1] \cdot \alpha_2\} \in]0, \alpha_2[$, $\{u_3 + [u_2 + [u_1 + n \cdot \alpha_1] \cdot \alpha_2] \cdot \alpha_3\} \in]\alpha_3, 1[$, so ist $\eta^M(n) = 0$, usw.

Zur besseren Beschreibung dieses Vorgangs verwenden wir die folgenden Begriffe:

$\mathbf{T}^M := \{x + \mathbf{Z}^M : x \in \mathbb{R}^M\}$, der M -Torus.

Ein Torusrepräsentant sei eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^M$, so daß für $z \in \mathbf{T}^M$ der Durchschnitt $z \cap \mathcal{T}$ einelementig ist. Das eine Element bezeichnen wir mit $z_{\mathcal{T}}$. Für $x \in \mathbb{R}^M$ sei $x_{\mathcal{T}} := (x + \mathbf{Z}^M)_{\mathcal{T}}$. Auf $\mathcal{T}$ übertragen wir die Struktur des Torus: Addition mod 1 ($(x, y) \mapsto (x+y)_{\mathcal{T}}$), Topologie und normiertes Haarmaß. Dieses nennen wir λ , unabhängig von $\mathcal{T}$. Wir benötigen insbesondere die beiden Torusrepräsentanten

$$\mathcal{I} := [0, 1]^M$$

$$\mathcal{J} := \{x \in \mathbb{R}^M : 0 \leq \pi_1 x < 1, 0 \leq \pi_j x - (\pi_{j-1} x) \cdot \alpha_j < 1 \ (j \in M \setminus \{1\})\}$$

(Die π_j sind die Koordinatenabbildungen in $\mathbb{R}^M$.)

In $\mathcal{J}$ betrachten wir die Mengen

$$I^j: = \{x \in \mathcal{J} : \tau_t(x) \in]0, \alpha_t[\ (t < j), \tau_j(x) \in]\alpha_j, 1[\} (j \in M)$$

$$I_2: = \{x \in \mathcal{J} : \tau_t(x) \in]0, \alpha_t[\text{ für alle } t \in M\}$$

$$I_0: = \bigcup_{j \text{ ungerade}} I^j ; \quad I_1: = \bigcup_{j \text{ gerade}} I^j \quad (M = N)$$

und für $M = \langle 1, i \rangle$:

$$I_0: = \begin{cases} \bigcup_{j \text{ ungerade}} I^j & i \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j \text{ ungerade}} I^j \cup I_2 & i \text{ gerade} \end{cases}$$

$$I_1: = \begin{cases} \bigcup_{j \text{ gerade}} I^j \cup I_2 & i \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j \text{ gerade}} I^j & i \text{ gerade} \end{cases}$$

$\alpha^M \in \mathbb{R}^M$ sei der Vektor mit $\tau_j \alpha^M = \alpha_1 \dots \alpha_j \ (j \in M)$.

Für $z \in \mathbb{R}^M$, $k \in \mathbb{Z}$ sei der Vektor $[z; k \cdot \alpha^M] \in \mathbb{R}^M$ gegeben durch $[z; k \cdot \alpha^M] =$

$$= (z_1 + k\alpha_1, z_2 + [z_1 + k\alpha_1] \cdot \alpha_2, z_3 + [z_2 + [z_1 + k\alpha_1] \cdot \alpha_2] \cdot \alpha_3, \dots)$$

oder

$$(1a) \quad \tau_1 [z; k \cdot \alpha^M] = \tau_1 z + k\alpha_1$$

$$(1b) \quad \begin{aligned} \tau_j [z; k \cdot \alpha^M] &= \tau_j z + [\tau_{j-1} [z; k \cdot \alpha^M]] \cdot \alpha_j = \\ &= \tau_j z + (\tau_{j-1} [z; k \cdot \alpha^M]) \cdot \alpha_j - \{\tau_{j-1} [z; k \cdot \alpha^M]\} \cdot \alpha_j \\ &\quad (j \in M \setminus \{1\}) . \end{aligned}$$

Die Folge $(\gamma^{M(k)})_{k \in \mathbb{Z}}$ ist so bestimmt durch den Ein-

tritt von $[u; k \cdot \alpha^M]_{\mathcal{J}}$ in eine der Teilmengen I_0, I_1 von $\mathcal{J}$, wenn $u \in \mathcal{J}$ der Vektor mit $\tau_j u = u_j$ ist.

Die Folge $([u; k \cdot \alpha^M]_{\mathcal{J}})_{k \in \mathbb{Z}}$ verhält sich zunächst un-

übersichtlich. Durch eine einfache, allerdings unstetige Transformation des Torus läßt sie sich aber in die Bahn eines Punktes unter einer Translation des Torus überführen (Lemma 3.5). Wir geben die Transformation

$$\psi_{\mathcal{T}}: \mathbb{T}^M \rightarrow \mathbb{T}^M$$

mit Hilfe der Repräsentanten $\mathcal{J}$ und $\mathcal{T}$ und einer Bijektion

$$\psi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{J}:$$

$$(\psi_{\mathcal{T}} y)_{\mathcal{J}} = \psi y_{\mathcal{T}} \quad (y \in \mathbb{T}^M), \quad \text{wobei}$$

$$(2a) \quad \pi_1 \psi x = \pi_1 x$$

$$(2b) \quad \pi_j \psi x = \pi_j x - (\pi_{j-1} x) \cdot \alpha_j \quad (j \in M \setminus \{1\}).$$

Lemma 3.5 : Für $x \in \mathcal{T}$ ist

$$(3a) \quad \psi(x+k \cdot \alpha^M)_{\mathcal{J}} = [\psi x; k \cdot \alpha^M]_{\mathcal{J}}, \quad \text{bzw. in Komponenten}$$

$$(3b) \quad \pi_j \psi(x+k \cdot \alpha^M)_{\mathcal{J}} = \pi_j [\psi x; k \cdot \alpha^M]_{\mathcal{J}} = \{\pi_j [\psi x; k \cdot \alpha^M]\} \quad (j \in M).$$

$$\text{Beweis: } \pi_1 \psi(x+k \cdot \alpha^M)_{\mathcal{J}} \stackrel{(2a)}{=} \pi_1(x+k \cdot \alpha^M)_{\mathcal{T}} = \{\pi_1(x+k \cdot \alpha^M)\}$$

$$\pi_1 [\psi x; k \cdot \alpha^M]_{\mathcal{J}} \stackrel{(1a)}{=} \{\pi_1 \psi x + k \alpha_1\} \stackrel{(2a)}{=} \{\pi_1 x + k \alpha_1\} = \{\pi_1(x+k \cdot \alpha^M)\}$$

Sei nun $1 < t \in M$ und (3b) für $j < t$ bewiesen:

$$\begin{aligned} \pi_t \psi(x+k \cdot \alpha^M)_{\mathcal{J}} &\stackrel{(2b)}{=} \pi_t(x+k \cdot \alpha^M)_{\mathcal{T}} - (\pi_{t-1}(x+k \cdot \alpha^M)_{\mathcal{T}}) \cdot \alpha_t = \\ &= \{\pi_t x + k \cdot \alpha_1 \dots \alpha_t - (\pi_{t-1}(x+k \cdot \alpha^M)_{\mathcal{T}}) \cdot \alpha_t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_t [\psi x; k \cdot \alpha^M]_{\mathcal{J}} &= \{\pi_t [\psi x; k \cdot \alpha^M]\} \stackrel{(1b)}{=} \\ &= \{\pi_t \psi x + (\pi_{t-1} [\psi x; k \cdot \alpha^M]) \alpha_t - \{\pi_{t-1} [\psi x; k \cdot \alpha^M]\} \cdot \alpha_t\} = \\ &= \{\pi_t x - (\pi_{t-1} x) \cdot \alpha_t + (\pi_{t-1} [\psi x; k \cdot \alpha^M]) \alpha_t - (\pi_{t-1} \psi(x+k \cdot \alpha^M)_{\mathcal{T}}) \alpha_t\} \end{aligned}$$

Es genügt daher zu zeigen:

$$k \cdot \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_t =$$

$$(-\tau_{t-1}x + \underbrace{\tau_{t-1}[\psi x; k\alpha^M]}_{(1b)} - \underbrace{\tau_{t-1}\psi(x+k\alpha^M)}_{(2b)} + \underbrace{\tau_{t-1}(x+k\alpha^M)}_{(3b)}) \cdot \alpha_t$$

Formt man auf der rechten Seite die einzelnen Ausdrücke nach den darunterstehenden Formeln um, so bekommt man rekursiv für $1 \leq s < t$:

$$(-\tau_{t-s}x + \tau_{t-s}[\psi x; k\alpha^M] - \tau_{t-s}\psi(x+k\alpha^M) + \tau_{t-s}(x+k\alpha^M)) \cdot \alpha_{t-s+1} \cdot \dots \cdot \alpha_t.$$

Für $s=t-1$ wird das

$$\begin{aligned} & (-\tau_1x + \tau_1[\psi x; k\alpha^M] - \tau_1\psi(x+k\alpha^M) + \tau_1(x+k\alpha^M)) \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_t = \\ & = (-\tau_1x + \tau_1\psi x + k\alpha_1 - \tau_1(x+k\alpha^M) + \tau_1(x+k\alpha^M)) \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_t = \\ & = k \cdot \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_t. \end{aligned}$$

Folgerung: Setzen wir $S_a = \psi^{-1}I_a$ ($a \in \langle 0, 1 \rangle$),

so ist $\eta^M(n) = a$, wenn $(\psi^{-1}u + n \cdot \alpha^M) \in S_a$.

Wichtig für uns ist daher die Translation des Torus, die in $\mathcal{T}$ dargestellt wird durch

$$D: x \longmapsto (x+k\alpha^M)_{\mathcal{T}} \quad (x \in \mathcal{T}).$$

Das Lemma 3.5 besagt: $\psi D \psi^{-1}y = [y; \alpha^M]_{\mathcal{T}}$ ($y \in \mathcal{T}$).

Für die dynamischen Systeme $(\overline{0(x)}, D)$ ($x \in \mathcal{T}$) gilt das in Satz 1.8 Gesagte. Für $x \in \mathcal{T}$ bezeichne λ_x das invariante W-Maß auf $\overline{0(x)}$.

Folgende Menge $\alpha_j \in \mathcal{T}$ hat das Haarmaß 0 und daher nichtleeres Komplement:

$$\alpha_j = \{z \in \mathcal{T} : \exists j \in \mathbb{M}, n \in \mathbb{Z}, \{\tau_j[z; n\alpha^M]\} = 0\} \quad (M \neq N);$$

$$\alpha_j = \{z \in \mathcal{T} : \exists j \in \mathbb{M}, n \in \mathbb{Z}, \{\tau_j[z; n\alpha^M]\} = 0\} \cup$$

$$\cup \{z \in \mathcal{T} : \exists n \in \mathbb{Z} \forall j \in \mathbb{M} \{\tau_j[z; n\alpha^M]\} \in]0, \alpha_j[\} \quad (M = N).$$

Sei $\alpha_{\mathcal{T}} := \psi^{-1}(\alpha_{\mathcal{S}})$. 3.5 zeigt, daß $\alpha_{\mathcal{T}}$ invariant unter D ist. Da $\{(S_0 \cup S_1) \in \alpha_{\mathcal{T}}, \text{ haben wir auch}$

$$\{x \in \mathcal{T} : 0(x) \setminus (S_0 \cup S_1) \neq \emptyset\} \in \alpha_{\mathcal{T}}.$$

Definition 3.6 : $\eta : \mathcal{T} \cdot \alpha_{\mathcal{T}} \longrightarrow \Omega_2$

$$x \longmapsto \eta^x$$

mit $\eta^x(n) = a$, wenn $D^n x \in S_a$ ($a \in \langle 0, 1 \rangle$).

Bemerkung: Die Folge η^M ist eine derartige Folge:

$\eta^M = \eta^{\psi^{-1}u}$. Umgekehrt läßt sich jede Folge η^x durch den gleichen Einsetzprozeß erzeugen wie η^M .

Wegen des Isomorphiesatzes 1.5 brauchen wir jetzt nur noch zu zeigen:

1, $S_0 \cap \overline{0(x)}$ ist λ_x -randlos für jedes $x \in \mathcal{T} \cdot \alpha_{\mathcal{T}}$. (3.7)

2, Für jedes $x \in \mathcal{T} \cdot \alpha_{\mathcal{T}}$ ist $\eta : \overline{0(x)} \cdot \alpha_{\mathcal{T}} \longrightarrow \Omega_2$ injektiv. (3.9)

Lemma 3.7 : Für $x \in \mathcal{T} \cdot \alpha_{\mathcal{T}}$ ist $S_0 \cap \overline{0(x)}$ λ_x -randlos.

Beweis: Wegen $\mathcal{D}S_0 \in \alpha_{\mathcal{T}}$ (es ist nämlich $\mathcal{D}S_0 \in \{(S_0 \cup S_1) \in \alpha_{\mathcal{T}}\}$)

und $\alpha_{\mathcal{T}} = \alpha_{\mathcal{T}}' \cup \alpha_{\mathcal{T}}''$ mit

$$\alpha_{\mathcal{T}}' = \bigcup_{j \in \mathbb{M}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D^n \{y \in \mathcal{T} : \tau_k y - (\tau_{k-1} y) \alpha_k \neq 0 \ (k < j), \tau_j y - (\tau_{j-1} y) \alpha_j = 0\}$$

(dabei: $\tau_0 y \cdot \alpha_0 = 0$)

$$\alpha_{\mathcal{T}}'' = \begin{cases} \emptyset & \text{wenn } M \neq N \\ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D^n \{y \in \mathcal{T} : \tau_j y - (\tau_{j-1} y) \cdot \alpha_j \in]0, \alpha_j[\text{ für alle } j \in M\} & (M = N) \end{cases}$$

genügt es, zu zeigen, daß die Mengen, die in diesen Vereinigungen auftreten, alle das λ_x -Maß 0 haben. Betrachten wir zunächst

$$A_j = \{y \in \mathcal{T} : \tau_k y - (\tau_{k-1} y) \cdot \alpha_k \neq 0 \ (k < j), \ \tau_j y - (\tau_{j-1} y) \cdot \alpha_j = 0\}.$$

Ist α_j rational, so hält sich die Folge $([x; n \cdot \alpha^M]_{\mathcal{T}})_n \in \mathbb{Z}$ immer in endlich vielen Hyperebenen parallel zu

$$\psi(A_j) = \{z \in \mathcal{T} : \tau_k z \neq 0 \ (k < j), \ \tau_j z = 0\} \text{ auf. Die Nebenklasse } \overline{0(x)} \text{ ist daher zu } A_j \text{ disjunkt und } \lambda_x(A_j) = 0.$$

Sei jetzt α_j irrational. Dann ist für $\varepsilon > 0$

$$\{y \in \mathcal{T} : \tau_k y - (\tau_{k-1} y) \cdot \alpha_k \neq 0 \ (k < j), \ \tau_j y - (\tau_{j-1} y) \alpha_j \in [0, \varepsilon [\cup]1 - \varepsilon, 1[\}$$

eine offene Umgebung von A_j , und nach Übergang in den Repräsentanten $\mathcal{T}$ kann man durch grobes Abschätzen der relativen Aufenthaltshäufigkeit ihr Maß durch $2^{j+1} \varepsilon$ beschränken. Das gilt für alle $\varepsilon > 0$, daher ist $\lambda_x(A_j) = 0$.

$$\text{Sei } M = \mathbb{N}. \quad \alpha_r^* =$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D^n \left(\bigcap_{j \in M} \{y \in \mathcal{T} : \tau_k y - (\tau_{k-1} y) \cdot \alpha_k \in]0, \alpha_k[\ (k \leq j)\} \right)$$

Die Mengen in diesem Durchschnitt sind offen; wie man durch Abzählen von 2 in der Folge γ^j der Toeplitz-Konstruktion sieht, hat die j -te Menge die relative Aufenthaltshäufigkeit $\alpha_1 \dots \alpha_j \leq 2^{-j}$, der Durchschnitt also das Maß 0.

Für den Nachweis der Injektivität von γ benötigen wir noch das

Lemma 3.8 : Für $x, y \in \mathcal{T} \setminus \alpha_j$ gilt: $\psi^{-1} y \in \overline{0(\psi^{-1} x)}$ genau

$$\text{dann, wenn } y \in \overline{\{[x; n \cdot \alpha^M]_{\mathcal{T}} : n \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\{\psi D^n \psi^{-1} x : n \in \mathbb{Z}\}}.$$

Beweis: Wir zeigen, daß $\psi|_{\mathcal{T} \setminus \alpha_r}$ ein Homöomorphismus zwischen $\mathcal{T} \setminus \alpha_r$ und $\mathcal{T} \setminus \alpha_j$ ist; daraus folgt unmittelbar die Behauptung. Auf $\mathcal{T} \setminus \alpha_r$ bzw. $\mathcal{T} \setminus \alpha_j$ stimmt

die Torustopologie mit der vom $\mathbb{R}^M$ induzierten überein. Es genügt daher, die Stetigkeit der Koordinatenabbildungen in beiden Richtungen nachzuprüfen. Diese ist nach der Definition von ψ aber offensichtlich.

Lemma 3.9 : Für jedes $x \in \mathcal{O} \setminus \alpha_f$ ist $\eta|_{\overline{\mathcal{O}(x)}} \setminus \alpha_f$ injektiv.

Beweis: Sei etwa $M = N$ und $x, y \in \mathcal{O} \setminus \alpha_f$, $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$, $\eta^x = \eta^y$.

Wir zeigen rekursiv: $\pi_j \psi x = \pi_j \psi y$ ($j \in M$).

S_1 ist offen und $S_1 \cap \overline{\mathcal{O}(x)} \neq \emptyset$, wie aus der Toeplitz-Konstruktion hervorgeht. Daher existieren

$$\begin{aligned} m_1 &:= \inf \pi_1(S_1 \cap \overline{\mathcal{O}(x)}) \\ m_2 &:= \sup \pi_1(S_1 \cap \overline{\mathcal{O}(x)}) \end{aligned} \quad (0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2})$$

Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, so daß

$$\begin{aligned} m_1 &\leq \pi_1 D^{n_1} x \leq m_1 + \varepsilon, & \eta^x(n_1) &= 1 \\ m_2 - \varepsilon &\leq \pi_1 D^{n_2} x \leq m_2, & \eta^x(n_2) &= 1. \end{aligned}$$

Wegen $\eta^y = \eta^x$ ist auch $\pi_1 D^{n_1} y \in [m_1, m_2]$, $\pi_1 D^{n_2} y \in [m_1, m_2]$,

und, da $\alpha_1 \leq \frac{1}{2}$:

$$\pi_1 D^{n_2} y - \pi_1 D^{n_2} x = \pi_1 D^{n_2} x - \pi_1 D^{n_1} x \geq m_2 - m_1 - 2\varepsilon.$$

Daraus folgt: $|\pi_1 D^{n_1} y - \pi_1 D^{n_1} x| \leq \varepsilon$ und, falls auch

$\varepsilon < \min(\pi_1 x, 1 - \pi_1 x)$: $|\pi_1 y - \pi_1 x| \leq \varepsilon$, also $\pi_1 y = \pi_1 x$ oder $\pi_1 \psi y = \pi_1 \psi x$.

Die Behauptung sei nun richtig für alle $s < j \in M \setminus \{1\}$. Wird in der Toeplitz-Konstruktion von η^M für den dortigen Vektor u einmal ψx , einmal ψy verwendet, somit

$\eta^M = \eta^x = \eta^y$, so ist beide Male die Folge η^{j-1} dieselbe. Die insgesamt in η^{j-1} eingesetzte Folge ist bei den beiden Konstruktionen ebenfalls dieselbe:

$(\eta^M(t_k(\eta^{j-1})))_{k \in \mathbb{Z}}$. Sie ist wieder eine Sturm-Toeplitz-Folge.

Sei π^j die Projektion von $\mathcal{J} = [0, 1]^M$ auf

$$\mathcal{J}_\epsilon^j = [0, 1]^{M \setminus \langle 1, j-1 \rangle}.$$

Im Torus $\mathcal{J}^j$ betrachten wir anstelle der Mengen I^i ($i \in M$) jetzt $\pi^j I^i$ ($i \geq j$). Die Folge

$$(\pi^j[u; t_k(\eta^{j-1}) \cdot \alpha^M]_{\mathcal{J}})_{k \in \mathbb{Z}} = ([\pi^j u; k \frac{\pi^j \alpha^M}{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1}}]_{\mathcal{J}^j})_{k \in \mathbb{Z}}$$

hat bzgl. des Mengensystems $(\pi^j I^i)_{i \geq j}$ die gleichen

Eigenschaften wie $([u; t \cdot \alpha^M]_{\mathcal{J}})_{t \in \mathbb{Z}}$ bzgl. $(I^i)_{i \in M}$, und

sie ist für die Werte von $(\eta^M(t_k(\eta^{j-1})))_{k \in \mathbb{Z}}$ zuständig.

$\pi^j \psi_x$ und $\pi^j \psi_y$ gehören nicht zu der $\mathcal{A}_j$ entsprechenden Ausnahmemenge $\mathcal{A}_j$ in $\mathcal{J}^j$, aber wegen der Stetigkeit der Projektion π^j gehören sie noch zu einer Bahnhülle (Lemma 3.8). Wenn wir die Aussage des Induktionsbeginns nach $\mathcal{J}$ transportieren und berücksichtigen, daß in $\mathcal{J}^j$ die gleiche Situation vorliegt, bekommen wir

$$\pi_j \pi^j \psi_x = \pi_j \pi^j \psi_y; \text{ das ist aber die Behauptung, weil}$$

$$\pi_j \pi^j = \pi_j.$$

Damit ist der Beweis des Satzes 3.3 abgeschlossen.

Literatur

- 1 F. Hahn and Y. Katznelson: On the entropy of uniquely ergodic transformations. TAMS 126 (1967), 335-360
- 2 P. R. Halmos and J. v. Neumann: Operator methods in classical mechanics II.
Ann. of Math. 43 (1942), 332-350
- 3 G. A. Hedlund: Sturmian minimal sets
Amer. J. of Math. 66 (1944), 605-620
- 4 K. Jacobs: Lecture Notes on Ergodic Theory; Aarhus
- 5 K. Jacobs and M. Keane: 0-1-sequences of Toeplitz type. Zeitschr. f. Wahrsch. 13 (1969), 123-131
- 6 R. Jewett: The prevalence of uniquely ergodic systems.
Journ. of Math. and Mech. 19 (1970), 717-729
- 7 S. Kakutani: Ergodic Theory of Shift Transformations.
Proc. V Berkeley Symp. (1966)
- 8 A. B. Katok and A. M. Stepin: Approximations in ergodic theory. Russ. Math. Surveys 22 (1967), 77- 102
- 9 M. Keane: Generalized Morse Sequences.
Zeitschr. f. Wahrsch. 10 (1968), 335-353
- 10 M. Morse and G.A. Hedlund: Symbolic dynamics II, Sturmian Trajectories.
Amer. J. of Math. 62 (1940), 1-42
- 11 J.C. Oxtoby: Ergodic sets.
Bull. AMS 58 (1952), 116-136
- 12 W. Parry: Symbolic dynamics and transformations of the unit interval. TAMS 122 (1966), 368-378

- 13 W.A. Veech: Strict ergodicity in zero dymensional
dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem
mod 2. TAMS 140 (1969), 1-33
- 14 H. Weyl: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1.
Math. Ann. 77 (1916), 313-352

Lebenslauf

Ich wurde am 14. Oktober 1941 in Pappenheim, Kreis Weißenburg in Bayern, geboren. Meine Eltern sind der Pfarrer Wilhelm Grillenberger und seine Frau Anna, geb. Elflein. Ich besuchte die Volksschule von 1947 bis 1951 in Neudorf bei Pappenheim und München, dann das Wilhelmsgymnasium in München und vom November 1956 an bis zum Abitur im Sommer 1960 das Humanistische Gymnasium in Fürth.

Nach dem Wehrdienst begann ich im Sommersemester 1962 das Studium der Physik in Erlangen. Nach dem Vordiplom im November 1964 und einem Semester an der Universität Nancy (Winter 1965/66) wechselte ich zum Fach Mathematik über. Als Schüler von Prof. K. Jacobs legte ich im Juli 1968 die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Vom Mai 1967 bis zum Januar 1969 war ich Hilfskraft am Mathematischen Institut. Seitdem bin ich als wissenschaftliche Hilfskraft bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft angestellt.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
